ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les deux problèmes sont indépendants; ils doivent être obligatoirement traités

PREMIER PROBLÈME (*sur 13 points*)

$\mathfrak{M}_p$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. I est la matrice unité.

Le polynôme caractéristique de $A \in \mathfrak{M}_p$ s'écrit :

$$P(s) = \det(s.I - A) = s^p + a_1 s^{p-1} + a_2 s^{p-2} + \ldots + a_{p-1} s + a_p$$

I

À toute matrice $A \in \mathfrak{M}_p$, dont on note a_{ij} l'élément de la $i^{ième}$ ligne et de $j^{ième}$ colonne, on associe le nombre :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}, \text{ appelé trace de A}$$

1° *a.* Démontrer que l'application « tr » ainsi définie est une application linéaire de $\mathfrak{M}_p$ dans R.

b. Démontrer que quelles que soient les matrices A et B appartenant à $\mathfrak{M}_p$:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

En déduire que si A a pour valeurs propres réelles ou complexes, simples ou multiples $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ et si $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par S_n la trace de A^n, on a alors :

$$S_n = \sum_{i=1}^{p} s_i^n = \text{tr}(A^n)$$

2° Montrer que $P'(s) = \dfrac{dP}{ds}$ peut s'écrire : $\quad P'(s) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{P(s)}{s - s_i}\right)$

3° Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on se propose de diviser $P(s)$ par le polynôme du premier degré $(s - \lambda)$ tel que :

$$P(s) = (s - \lambda)(b_0 s^{p-1} + b_1 s^{p-2} + \ldots + b_{p-1}) + b_p$$

a. Montrer que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, il existe une relation de récurrence entre b_k et b_{k-1}.

b. En déduire alors $\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, l'expression de b_k en fonction de a_k et λ.

c. Exprimer $P'(s)$ sous la forme d'un polynôme de degré $(p - 1)$ dont les coefficients sont fonction des (a_i) et des (S_i).

d. Déduire alors l'égalité fondamentale :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}, \qquad S_k + a_1 S_{k-1} + \ldots + a_{k-1} S_1 + k\, a_k = 0$$

4° On considère maintenant une matrice P de $\mathfrak{M}_p$ dont tous les coefficients sont réels non négatifs et qui satisfont :

$$\sum_{i=1}^{p} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

Tournez la page S. V. P.

a. Montrer que P admet 1 pour valeur propre.

b. Montrer que les valeurs propres de P sont au plus égales à 1 en module.

II

On désigne par U la matrice de $\mathfrak{M}_p$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On note $\varepsilon_i^{(k)}$ une matrice de $\mathfrak{M}_p$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon_{jj} = 0 & \forall j \in \{i, i+1, \ldots, i+k-1\}, \quad i+k-1 \leqslant p \\ \varepsilon_{nm} = 0 & \forall (n, m) \in \{i, i+1, \ldots, i+k-1\}^2 \end{cases}$$

1° Calculer U^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2° Soit E_p le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_p$ engendré par I et U.

C et D deux éléments de E_p tels que :

$$C = \alpha \cdot I + \beta \cdot U ; \qquad D = \gamma \cdot I + \delta \cdot U$$

a. Calculer le produit C . D.

b. Appartient-il à E_p ?

3° *a.* Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C^n \in E_p$ et calculer ses composantes dans la base (I, U).

b. Donner les conditions que doivent satisfaire α et β pour que $C = \alpha \cdot I + \beta \cdot U$ admette un inverse C^{-1} pour la multiplication des matrices.

c. On désigne par $C^{-n} = (C^{-1})^n$.
En déduire alors l'expression de C^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

4° Dans toute la suite du problème on pose :

$$\alpha + p\beta = 1 ; \qquad \beta \in \mathbb{R}^+, \alpha \neq 0$$

a. Montrer que les valeurs propres de C sont réelles.

b. Montrer que les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

c. Montrer que C est diagonalisable.

5° On se propose de déterminer det $[s \cdot I - C]$.

a. On pose $V = \frac{1}{p}(1 - \alpha) \cdot U, \qquad V \in \mathfrak{M}_p$.

Calculer tr $[V^k]$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

b. En utilisant le 3°*d* du I, donner le polynôme caractéristique de C.

c. En déduire alors les valeurs propres de C.

d. Une valeur propre était-elle prévisible?

6° $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ étant une base de $\mathbb{R}^p$ formée des vecteurs propres de C, on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ à $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

a. Montrer qu'il existe deux matrices π_1 et π_2 appartenant à $\mathfrak{M}_p$ telles que : $C = s_1 \cdot \pi_1 + s_2 \cdot \pi_2$

Tournez la page S. V. P.

(On donnera les expressions de π_1 et π_2 en fonction de Q, Q^{-1} et des matrices $\varepsilon_1^{(p-1)}$ et $\varepsilon_p^{(1)}$ définies dans le préambule.)

b. Montrer que π_1 et π_2 sont les matrices de deux projecteurs; préciser leurs propriétés.

c. En déduire alors l'expression de C^n en fonction de π_1 et π_2, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

7° *a.* Donner l'expression de π_1 et π_2 sur la base (I, U).

b. Pouvait-on prévoir le résultat?

DEUXIÈME PROBLÈME (*sur 7 points*)

On désigne par R l'espace vectoriel des nombres réels.

Pour $x \in \mathrm{R}$, on note $|x|$ sa valeur absolue.

Soit N un entier naturel et $\mathrm{I_N}$ l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à N.

Soit α, a, b trois nombres réels ($a < b$), $[a, b]$ un intervalle borné et fermé de R, et $\mathrm{D} = [a, b] \times \mathrm{R}$.

On désigne enfin par $\mathrm{C}^1(\mathrm{D})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continûment différentiables sur D à valeurs dans R, et f une fonction de $\mathrm{C}^1(\mathrm{D})$.

Pour toute fonction y définie et continue sur $[a, b]$ à valeurs dans R on note :

$$\mathrm{M}(\delta, y) = \sup_{\substack{|x-x'| \leqslant \delta \\ x, x' \in [a, b]}} |y(x) - y(x')|$$

où δ est un réel vérifiant $0 < \delta \leqslant b - a$.

On considère une équation différentielle à condition initiale en $x = a$, du type : (1)
$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \qquad x \in]a, b]$$

admettant une solution unique y deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$.

On lui associe le procédé numérique d'approximation de la solution obtenue en ne considérant que les deux premiers termes du développement de Taylor de y.

(2)
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) & n \in \mathrm{I_{N-1}} \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

où $h = (b - a)/\mathrm{N}$, $x_n = a + nh$ et y_n une approximation de $y(x_n)$.

Ce problème a pour objet d'établir certaines conditions conduisant à la convergence $[y_n - y(x_n)]$ vers 0 lorsque h tend vers 0.

1° Montrer que $\lim_{\delta \to 0} \mathrm{M}(\delta, y) = 0$.

2° Soit une suite de nombres réels *positifs* vérifiant l'inégalité :
$$\begin{cases} a_{n+1} \leqslant (1 + \mathrm{A})\, a_n + \mathrm{B} & n \in \mathrm{I_{N-1}} \\ \mathrm{A} > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{B} \geqslant 0 \end{cases}$$

(*i*) Montrer que a_n vérifie : $a_n \leqslant (1 + \mathrm{A})^n a_0 + \dfrac{(1 + \mathrm{A})^n - 1}{\mathrm{A}} \mathrm{B}$, quel que soit $n \in \mathrm{I_N}$

(*ii*) En déduire alors l'inégalité :

$$a_n \leqslant a_0\, e^{nA} + \frac{e^{nA} - 1}{A} B, \text{ quel que soit } n \in I_N$$

3° On suppose que f vérifie la propriété (P_K) :

$$(P_K) \qquad |f(x, y) - f(x, z)| \leqslant K\, |y - z| \qquad \text{pour tout } x \text{ de } [a, b] \text{ et tout } (y, z) \text{ de } R^2$$

où K est une constante réelle indépendante de x, y et z.

Montrer que si :

$$\sup_{(x, y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leqslant L$$

alors f possède la propriété (P_K); on précisera la valeur de K.

4° On pose :

$$M_2 = \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right|$$

En utilisant un développement en série de Taylor, montrer que, quel que soit n de I_{N-1}, on a :

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant (h \cdot K + 1)\, |y(x_n) - y_n| + \frac{h^2}{2} M_2$$

En déduire que l'erreur $e_n = y_n - y(x_n)$ vérifie quel que soit n de I_N :

$$|e_n| \leqslant \frac{\exp K(x_n - x_0) - 1}{K} \frac{h}{2} M_2$$

5° Soit x un élément de $[a, b]$, montrer qu'il existe une suite $x_n = a + nh$ convergente vers x, lorsque N tend vers $+\infty$.

En déduire que y_n converge vers $y(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$

6° *Application numérique :*

$a = 0$; $b = 1$
$N = 10$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}(x) = \cos(xy(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a. Calculer y_n pour $n = 0, \ldots, 10$.

b. Donner les valeurs numériques de K, M_2 et une majoration des e_n.